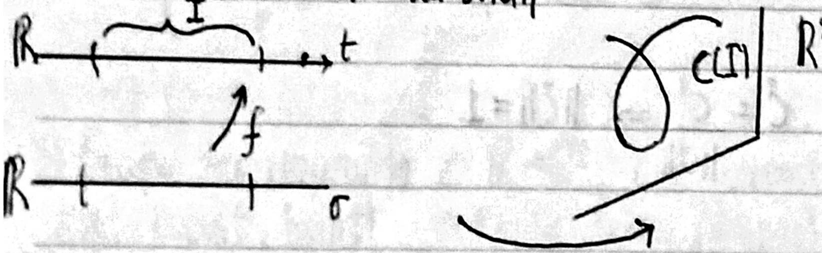
Μάθημα 4ο

14/10/16

Εστω $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ κανονική



$\tilde{c} = c \circ f : J \to \mathbb{R}^2$

$f: J \subset \mathbb{R} \to I \subset \mathbb{R}$ επί , $f(\sigma) = t$

Η $\tilde{c}$ είναι κανονική $\Leftrightarrow$ $\frac{df}{d\sigma} > 0$ παντού

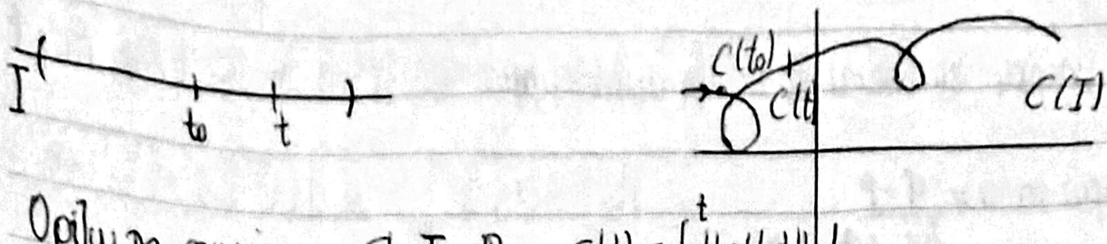
$\frac{df}{d\sigma} < 0$ παντού

Μήκος καμπύλης

$L_a^b(c) = \int_a^b \|c'(t)\| dt$ $\quad a < b, \ a, b \in I$

Μήκος τόξου η φυσική παράμετρος

Εστω $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ κανονική καμπύλη



Ορίζω τη συνάρτηση $S: I \to \mathbb{R}$, $s(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(t)\| d$
Η συνάρτηση S καλείται μήκος τόξου της c με αφετηρία το t_0.
Η συνάρτηση $s = s(t)$ και c' με $ds/dt\,(t) = \|c'(t)\| > 0$, $\forall t \in J \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Η $s = s(t)$ αντιστρέφεται με λεία αντιστροφή $t = t(s)$ με $\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{1}{\frac{ds}{dt}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|c'\|} > 0$$

Ορίζω την αναπαραμέτρηση $\tilde{c} = c \circ f$ και $f(s) = t(s)$
Η αναπαραμέτρηση $\tilde{c}$ καλείται αναπαραμέτρηση της c με παράμετρο το μήκος τόξου (ή με φυσική παράμετρο).

Σύμβαση συμβολισμού, θα γράφουμε $\tilde{c}(s) = c(s) = c(t(s))$

$$c' = \frac{dc}{dt}, \quad \dot{c} = \frac{dc}{ds}$$

$${}' = \frac{d}{dt}, \quad {}'' = \frac{d}{dt^2}, \ldots \quad \Big\| \quad \dot{} = \frac{d}{ds}, \quad \ddot{} = \frac{d^2}{ds^2}, \ldots$$

$$\dot{c} = \frac{dc}{ds} = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{dc}{dt} = \frac{c'}{\|c'\|} \Rightarrow \dot{c} = \frac{c'}{\|c'\|} \Rightarrow \|\dot{c}\| = 1.$$

Εστω $c(t)$ καμπύλη με παράμετρο t και $\|c'(t)\| = 1$, $\forall t$.
Η συνάρτηση μήκος τόξου και $s = s(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(\sigma)\| d\sigma = \int_{t_0}^{t} d\sigma \Rightarrow s = t - t_0$

$$s_1(t) = \int_{t_1}^{t} \|\ \| d\sigma = \int_{t_1}^{t_0} + \int_{t_0}^{t_1} \|\ \| \Rightarrow s_1 = s + \text{σταθ.}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Η καμπύλη c έχει παράμετρο το μήκος τόξου ανν $\|c'\| = 1$ παντού.

$c: I \to \mathbb{R}^2$ με παράμετρο t και μήκος τόξου s

$\bar{c} = T \circ c$, $T \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ με μήκος τόξου $\bar{s}$
$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(\sigma)\| d\sigma$, $\bar{s}(t) = \int_{t_0}^{t} \|\bar{c}'(\sigma)\| d\sigma$

$T = T_v \circ A \quad , A \in O(2)$

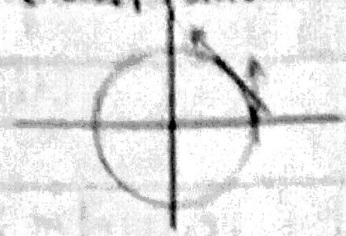
$\tilde{c}' = Ac' \Rightarrow \|\tilde{c}'\| = \|Ac'\| = \|c'\| \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \|\tilde{c}'(\sigma)\| d\sigma = \int_{t_0}^{t} \|c'(\sigma)\| d\sigma$

Γεωμετρικά ισότιμες καμπύλες έχουν το ίδιο μήκος τόξου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Θεωρώ την καμπύλη $c: I \to \mathbb{R}^2$ με $c(t) = (r\cos t, r\sin t)$

$\mathbb{R}$ ⟶ t



$c(\mathbb{R})$ = κύκλος κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $r>0$

$c'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$

$\|c'(t)\| = r$, Άρα η συνάρτηση μήκους τόξου είναι $s = s(t) = \int_0^t \|c'(\sigma)\| d\sigma = \int_0^t r\, d\sigma$

Άρα το μήκος τόξου είναι η συνάρτηση $s = s(t) = rt \Leftrightarrow t = \frac{s}{r}$.

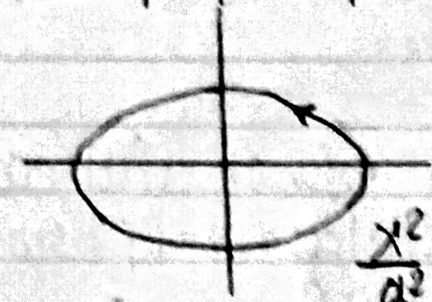
Η αναπαραμέτρηση της c με παράμετρο το μήκος τόξου είναι:

$c(s) = c(t(s)) = \left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}\right)$

$\dot{c}(s) = \left(-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r}\right) \quad , \|\dot{c}(s)\| = 1$

2) Θεωρώ την καμπύλη $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (a\cos t, b\sin t)$, $a, b > 0$ με
$c(t) = (a\cos t, b\sin t)$, $a \neq b > 0$ (είναι έλλειψη)

$\mathbb{R}$



$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

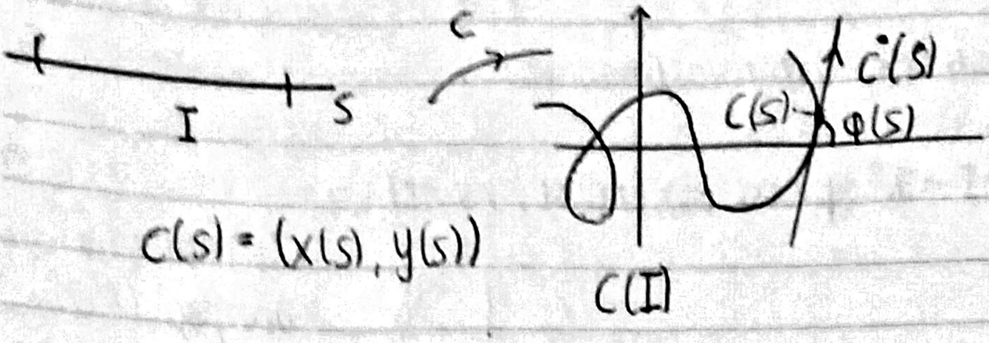
$c'(t) = (-a\sin t, a\cos t)$

$\|c'(t)\| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}$

Η συνάρτηση μήκους τόξου είναι $s = s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2\sin^2\sigma + b^2\cos^2\sigma}\, d\sigma$

Καμπυλότητα καμπύλης του $\mathbb{R}^2$ με φυσική παράμετρο το μήκος τόξου

Έστω $c: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ C^2 καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου s



$c(s) = (x(s), y(s))$

$\dot c(s) = (\dot x(s), \dot y(s))$ $\quad \|\dot c(s)\| = 1 \Leftrightarrow \dot x^2(s) + \dot y^2(s) = 1$

$= (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s))$

Θα ορίσω την καμπυλότητα της c ως τη συνάρτηση $K: I\to\mathbb{R}$ με $K(s) = \dot\varphi(s) = \frac{d\varphi}{ds}(s)$

ΛΗΜΜΑ Έστω $f, g: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, C^1 ώστε $f^2(t) + g^2(t) = 1$.
Για $t_0\in I$ και $\varphi_0\in\mathbb{R}$, υπάρχει μοναδική C^1 συνάρτηση $\varphi: I\to\mathbb{R}$ ώστε
$\varphi(t_0) = \varphi_0$ και $\begin{cases} f(t) = \cos\varphi(t) \\ g(t) = \sin\varphi(t)\end{cases}$

Απόδειξη: Ορίζω τη C^1 συνάρτηση $\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t} (f(\sigma)p'(\sigma) - f'(\sigma)p(\sigma))\,d\sigma$

$\varphi(t_0) = \varphi_0$

Αρκεί να δείξω ότι $(f(t) - \cos\varphi(t))^2 + (p(t) - \sin\varphi(t))^2 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2 - 2f(t)\cos\varphi(t) - 2p(t)\sin\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow f(t)\cos\varphi(t) + p(t)\sin\varphi(t) = 1$
$ff' + pp' = 0$. ■

$\dot x^2 + \dot y^2 = 1 \Rightarrow$ Υπάρχει C^1 συνάρτηση $\varphi(s)$ ώστε $\begin{cases}\dot x(s) = \cos\varphi(s) \\ \dot y(s) = \sin\varphi(s)\end{cases}$

Έστω ότι υπάρχει συνάρτηση $\bar\varphi(s)$ $\begin{cases}\dot x(s) = \cos\bar\varphi(s) \\ \dot y(s) = \sin\bar\varphi(s)\end{cases}$

$\Rightarrow \exists \lambda(\sigma)\in\mathbb{Z}$, $\bar\varphi(s) - \varphi(s) = 2\lambda(s)\pi$

→ δεν μπορεί παρά να είναι σταθερή γιατί αν δεν ήταν θα ίσχυε Θ.Ε.Τ. όπως $\lambda(s) \in \mathbb{Z}$

$\lambda(s) =$ ανεξάρτητο $\Rightarrow \phi = \varphi$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ονομάζουμε καμπυλότητα της C^2 καμπύλης $c(s) = (x(s), y(s))$ με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I$ τη συνάρτηση $\kappa : I \to \mathbb{R}$, $\kappa(s) = \dot{\varphi}(s)$ όπου $\varphi : I \to \mathbb{R}$ είναι γωνιακή συνάρτηση $\dot{c}(s) = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s))$

Υπολογισμός καμπυλότητας

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(s) = \cos\varphi(s) &\Rightarrow \ddot{x} = -\dot{\varphi}\sin\varphi = -\kappa\,\dot{y} \Rightarrow \dot{y}\ddot{x} = -\kappa\,(\dot{y})^2 \\ \dot{y}(s) = \sin\varphi(s) &\Rightarrow \ddot{y} = \dot{\varphi}\cos\varphi = \kappa\cdot\dot{x} \Rightarrow \dot{x}\ddot{y} = \kappa(\dot{x})^2 \end{aligned}\right\} \text{αφαίρεση κατά μέλη} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = \kappa\{\dot{x}^2 + \dot{y}^2\} = \kappa$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Η καμπυλότητα της καμπύλης $c(s) = (x(s), y(s))$, με φυσική παράμετρο s, είναι η συνάρτηση $\kappa = \dot{x}\cdot\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

1) Θεωρώ την καμπύλη $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $c(t) = P_0 + tv$, $P_0 \in \mathbb{R}^2$, $\|v\| = 1$.
Το διάνυσμα ταχύτητας είναι $c'(t) = v$.
Επειδή $\|c'(t)\| = \|v\| = 1 \Rightarrow t = s =$ μήκος τόξου
$c(s) = P_0 + sv = (x_0, y_0) + s(v_1, v_2) \Rightarrow c(s) = (\underbrace{x_0 + s v_1}_{x(s)}, \underbrace{y_0 + s v_2}_{y(s)}) \Rightarrow \kappa = 0$

2) Θεωρώ την καμπύλη $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
$c(s) = \left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}\right) = (x(s), y(s))$

$\kappa(s) = \dot{x}(s)\ddot{y}(s) - \dot{y}(s)\ddot{x}(s) = \dots \Rightarrow \kappa(s) = \frac{1}{r}$

3) Θεωρώ την καμπύλη $c(s) = \left(r\cos\frac{s}{r}, -r\sin\frac{s}{r}\right)$

$(\bar{s} = -s)$ $\qquad \kappa(s) = -\frac{1}{r}$

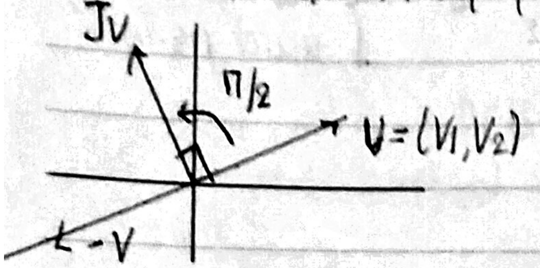
$c(s) = (x(s), y(s))$

$\dot{c}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s))$ = εφαπτόμενο διάνυσμα ή διάνυσμα ταχύτητας

$\ddot{c}(s) = (\ddot{x}(s), \ddot{y}(s))$ = διάνυσμα επιτάχυνσης

Οι στροφές $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί με πίνακα $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ως προς $\{e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1)\}$.

Για $\theta = \pi/2$ έχω τη στροφή $J = R_{\pi/2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με πίνακα $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$



$Jv = J(v_1, v_2) = (-v_2, v_1)$

$J(Jv) = -v \Rightarrow J^2 = -Id\ ,\ J^2 = J \circ J$

Η J καλείται μιγαδική δομή του $\mathbb{R}^2$.

$\kappa = \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = \langle (\ddot{x}, \ddot{y}), (-\dot{y}, \dot{x}) \rangle$

$\kappa_c = \langle \ddot{c}, J\dot{c} \rangle$

Είναι η καμπυλότητα γεωμετρική έννοια;;

Έστω $\tilde{c}$ γεωμετρικώς ισότιμη καμπύλη της, δηλαδή $\tilde{c} = T \circ c$, όπου $T \in Isom(\mathbb{R}^2)$, $T = T_v \circ A$, T_v = παράλληλη μεταφορά κατά $v \in \mathbb{R}^2$ και $A \in O(2)$

$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$

$\tilde{c}' = A\dot{c} \Rightarrow \tilde{c}' = \dot{\tilde{c}}$

$\boxed{\dot{\tilde{c}} = A\dot{c}} \Rightarrow \boxed{\ddot{\tilde{c}} = A\ddot{c}}$

Η καμπυλότητα της $\tilde{c}$ είναι η συνάρτηση $\kappa_{\tilde{c}} = \langle \ddot{\tilde{c}}, J\dot{\tilde{c}} \rangle$

$\kappa_{\tilde{c}} = \langle A\ddot{c}, J \circ A(\dot{c}) \rangle$

Εστω A στροφή κατά θ με πίνακα $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $\boxed{R_\theta \circ R_\varphi = R_{\theta+\varphi} = R_\varphi \circ R_\theta}$

$$J \circ A \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$J \circ A = R_{\pi/2} \circ R_\theta = R_\theta \circ R_{\pi/2} \Rightarrow J \circ A = A \circ J$$

Αρα, $K_{\tilde{c}} = \langle A\ddot{c}, A(J\dot{c}) \rangle \xlongequal{A \in O(2)} \langle \ddot{c}, J\dot{c} \rangle \Rightarrow K_{\tilde{c}} = K_c$

Εστω οτι A είναι κατοπτρισμός K_θ με πίνακα $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

$$J \circ A \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$A \circ J \sim \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ -\cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J \circ A = -A \circ J \Rightarrow K_{\tilde{c}} = -\langle A\ddot{c}, AJ\dot{c} \rangle = -K_c$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Εστω $c: I \to \mathbb{R}^2$ καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου s και καμπυλότητα K_c. Η καμπυλότητα της καμπύλης $\tilde{c} = T \circ c$, $T = T_v \circ A \in Isom(\mathbb{R}^2)$ είναι

$$K_{\tilde{c}} = \begin{cases} K_c & , A \text{ στροφή} \\ -K_c & , A \text{ κατοπτρισμός.} \end{cases}$$

Εστω $C: I \to \mathbb{R}^2$ καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου. Θεωρώ αναπαραμέτρηση με παράμετρο $\bar{s} = -s$, $\frac{d\bar{s}}{ds} = -1$

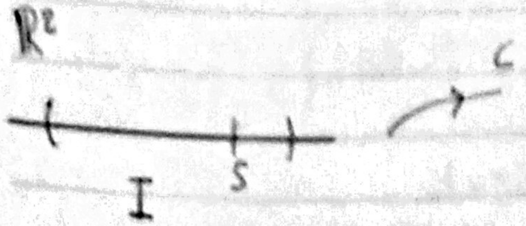
$c(s), c(\bar{s})$ | $K = \langle \ddot{c}, \dot{c} \rangle$, $\cdot = \frac{d}{ds}$

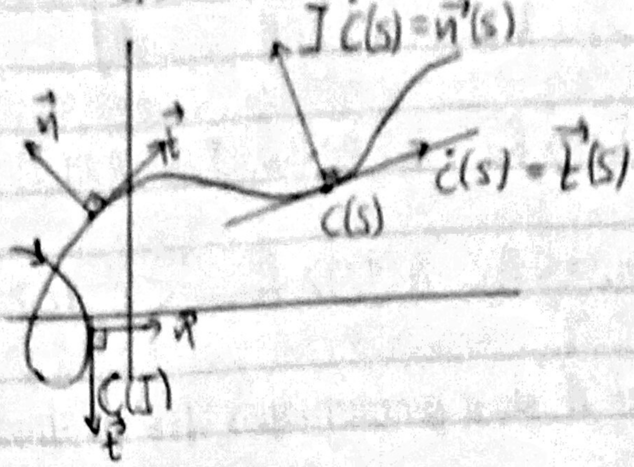
K , $\bar{K}$ | $\frac{dc}{d\bar{s}} = \frac{ds}{d\bar{s}} \cdot \frac{dc}{ds} \Rightarrow \frac{dc}{d\bar{s}} = -\dot{c} \Rightarrow \left\| \frac{dc}{d\bar{s}} \right\| = 1 \Rightarrow$

→ s είναι μήκος τόξου

$$\bar{\kappa} = \left\langle \frac{d^2c}{ds^2}, J\frac{dc}{ds} \right\rangle$$

$$\frac{d^2c}{ds^2} = \frac{d\dot{c}}{ds} = \frac{ds}{ds}\frac{d\dot{c}}{ds} = \ddot{c}$$





$c(s) = (x(s), y(s))$
$\dot{c}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s))$
s = μήκος

Το πλαίσιο **Frenet** της $c(s)$ είναι για κάθε $s \in I$ η ορθομοναδιαία δεξιόστροφη βάση. $\{ \underbrace{\vec{t}(s) = \dot{c}(s)}_{\text{εφαπτομ.}}, \underbrace{\vec{n}(s) = J\vec{t}(s)}_{\text{κάθετο}} \}$

$\dot{\vec{t}} = (\cos\varphi, \sin\varphi)^{\cdot} = (-\dot{\varphi}\sin\varphi, \dot{\varphi}\cos\varphi) = \kappa(-\sin\varphi, \cos\varphi)$

$\vec{n} = J\cdot\vec{t} = J(\cos\varphi, \sin\varphi) = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$

$\dot{\vec{t}} = \kappa\vec{n}$ 1ος τύπος **Frenet**

$\dot{\vec{n}} = (-\sin\varphi, \cos\varphi)^{\cdot} = (-\dot{\varphi}\cos\varphi, -\dot{\varphi}\sin\varphi) = -\kappa(\cos\varphi, \sin\varphi) = -\kappa\vec{t}$

$\dot{\vec{n}} = -\kappa\vec{t}$ 2ος τύπος **Frenet**.